JOURNAL OF ALGEBRA 6, 77-99 (1967)

Idéaux Premiers de l'Algèbre Enveloppante d'une Algèbre de Lie Nilpotente

Y. NOUAZÉ ET P. GABRIEL

Département de Mathématique, Montpellier
et
Institut de Recherche Mathématique, Strasbourg

Received, April 1966

Dans tout ce qui suit, $\mathfrak{g}$ désigne une algèbre de Lie nilpotente, de dimension finie, sur un corps k de caractéristique 0 et $U(\mathfrak{g})$ est son algèbre enveloppante universelle. Nous voulons montrer comment un argument de fonctorialité permet d'étendre à tous les idéaux premiers de $U(\mathfrak{g})$ les résultats obtenus par Dixmier [5] sur les idéaux maximaux "rationnels." Pour être complets, nous rappelons brièvement quelques raisonnements de Dixmier.

0. Définitions, Notations, Hypothèses

0.1. Les anneaux considérés sont associatifs et ont un élément unité. Les idéaux sont supposés bilatères. Un idéal I d'un anneau A est dit *premier* s'il est distinct de A et si, quels que soient les idéaux J et K non contenus dans I, $J.K$ n'est pas contenu dans I.

0.2. Conformément à [5], nous notons $A_1(k)$, ou simplement A_1 la k-algèbre engendrée par deux éléments p et q liés par la relation $[p, q] = pq - qp = 1$. Nous notons $A_n(k)$ ou A_n la k-algèbre engendrée par $2n$ éléments p_i, q_j $(i, j = 1,..., n)$ liés par les relations $[p_i, q_i] = 1$ et $[p_i, q_j] = [p_i, p_j] = [q_i, q_j] = 0$ si $i \neq j$. On a

$$A_n = A_1 \underset{k}{\otimes} A_1 \underset{k}{\otimes} \cdots \underset{k}{\otimes} A_1 \qquad (n \text{ facteurs})$$

On pose de même $A_0(k) = A_0 = k$.

L'algèbre A_1 a pour base sur k les monômes $p^i q^j$; nous notons $F_n A_1$ le sous-espace de A_1 engendré par les monômes de degré total $\leqslant n$ $(i + j \leqslant n)$ Alors A_1 est un anneau filtré dont le gradué associé est l'algèbre des polynômes en 2 variables. Par conséquent, A_1 est noethérien (à gauche et à droite; [2], chap. III, Section 2, cor. 1 de la prop. 12).

0.3. Nous notons $\mathfrak{z}$ le centre de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et $Z(\mathfrak{g})$ le centre de $U(\mathfrak{g})$. Nous identifions $\mathfrak{g}$ à une partie de $U(\mathfrak{g})$. Si I est un idéal de $U(\mathfrak{g})$, $Z(I)$ désigne le centre de $U(\mathfrak{g})/I$ et $k(I)$ l'anneau total des fractions de $Z(I)$.

0.4. Nous utiliserons souvent les hypothèses et notations suivantes : $\mathfrak{g}$ contient des éléments x, y et z tels que :

(i) $[x, y] = z$;

(ii) $z \in \mathfrak{z}$;

(iii) l'annulateur $\mathfrak{g}'$ de y dans $\mathfrak{g}$, c'est-à-dire le sous-espace de $\mathfrak{g}$ formé des t tels que $[t, y] = 0$, est de codimension 1 dans $\mathfrak{g}$. De tels x, y, z existent lorsque la dimension $[\mathfrak{z} : k]$ de $\mathfrak{z}$ sur k vaut 1 (choisir z et y dans les premier et deuxième termes de la suite centrale ascendante de $\mathfrak{g}$).

0.5. Nous notons $S(\mathfrak{g})$ l'algèbre symétrique de $\mathfrak{g}$,

1. La Formule de Taylor

1.1. Soit k un corps de caractéristique 0. *Une k-algèbre différentielle* désignera ici une k-algèbre A munie d'une dérivation D telle qu'il existe, pour tout $a \in A$, un entier n vérifiant $D^n a = 0$. Si q est une indéterminée et B une k-algèbre, nous munirons $k[q] \otimes_k B$ de la structure d'algèbre differentielle telle que

$$D(P(q) \otimes b) = P'(q) \otimes b; \qquad \text{par exemple} \qquad D(q^n \otimes b) = nq^{n-1} \otimes b.$$

Lemme de Taylor. *Soient A une k-algèbre différentielle et η un élément du centre de A tel que $D\eta = 1$. Il y a alors un isomorphisme d'algèbres différentielles*

$$\chi : A \xrightarrow{\sim} k[q] \otimes \left(\frac{A}{A\eta}\right)$$

tel que

$$\chi(a) = 1 \otimes a_0 + q \otimes (Da)_0 + \frac{q^2}{2!} \otimes (D^2 a)_0 + \frac{q^3}{3!} \otimes (D^3 a)_0 + \cdots,$$

si $a \in A$ et si x_0 désigne la classe modulo $A\eta$ de $x \in A$.

Il est clair en effet que $\chi(a \cdot b) = \chi(a) \cdot \chi(b)$, donc que χ est un homomorphisme d'algèbres. De même, on définit un homomorphisme $\chi' : k[q] \otimes_k (A/A\eta) \to A$ à l'aide des formules $\chi'(q \otimes 1) = \eta$ et

$$\chi'(1 \otimes a_0) = a - \eta(Da) + \frac{\eta^2}{2!}(D^2 a) - \frac{\eta^3}{3!}(D^3 a) + \cdots.$$

Il reste à vérifier que $\chi'\chi = Id(A)$ et $\chi\chi' = Id(k[q] \otimes_k (A/A\eta))$.

1.2. Soient p une indéterminée et $k[p] \otimes_D A$ le produit "tordu," c'est-à-dire l'algèbre engendrée par A et par un élément p soumis aux relations $pa - ap = Da$ si $a \in A$. Si $k[q]$ est l'algèbre des polynômes munie de la dérivation habituelle, $k[p] \otimes_D k[q]$ s'identifie à A_1, de sorte que χ induit un isomorphisme des produits tordus correspondants :

$$\psi : k[p] \underset{D}{\otimes} A \xrightarrow{\sim} A_1 \underset{k}{\otimes} \left(\frac{A}{A\eta}\right)$$

$$\psi(p \otimes 1) = p \otimes 1$$

et

$$\psi(1 \otimes a) = 1 \otimes a_0 + q \otimes (Da)_0 + \frac{q^2}{2!} \otimes (D^2a)_0 + \cdots .$$

Par exemple, avec les notations du paragr. 0, prenons pour A l'algèbre $U(\mathfrak{g}')_z$, obtenue à partir de l'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{g}')$ par localisation relativement à l'élément central z : c'est donc l'algèbre formée par les fractions u/z^n, où $u \in U(\mathfrak{g}')$. Prenons pour η la fraction y/z, pour D la dérivation définie par x :

$$D\left(\frac{u}{z^n}\right) = x \cdot \frac{u}{z^n} - \frac{u}{z^n} \cdot x \in U(\mathfrak{g})_z .$$

Dans ce cas, $k[p] \otimes_D A$ n'est autre que $U(\mathfrak{g})_z$ et $A/A\eta$ coincide avec $U(\mathfrak{g}'/ky)_z$ (on localise relativement à la classe z_0 de z modulo ky). On trouve ainsi :

THÉORÈME. *Avec les notations du paragr.* 0, *il y a un isomorphisme de k-algèbres*

$$\psi : U(\mathfrak{g})_z \xrightarrow{\sim} A_1 \underset{k}{\otimes} U\left(\frac{\mathfrak{g}'}{ky}\right)_z$$

tel que $\psi(x) = p \otimes 1$, $\psi(y) = q \otimes z$ *et plus généralement*

$$\psi(t) = 1 \otimes t_0 + q \otimes (Dt)_0 + \frac{q^2}{2!} \otimes (D^2t)_0 + \frac{q^3}{3!} \otimes (D^3t)_0 + \cdots ,$$

si

$$t \in U(\mathfrak{g}')_z ,$$

si u_0 *est la classe modulo* y *de* $u \in U(\mathfrak{g}')_z$ *et si* $Du = xu - ux$.

L'application ψ^{-1} envoie $p \otimes 1$ sur x, $q \otimes 1$ sur y/z et $1 \otimes u_0$ sur

$$u - (Du)\frac{y}{z} + \frac{(D^2u)}{2!}\frac{y^2}{z^2} - \frac{(D^3u)}{3!}\frac{y^3}{z^3} + \cdots .$$

1.3. *Remarque.* Lorsque A est une algèbre commutative, le lemme de Taylor a une signification géométrique simple : posons en effet $X = \operatorname{Spec} A$.

La donnée de D équivaut alors à la donnée d'une opération du groupe algébrique additif G_a sur X. La donnée de η équivaut à la donnée d'un morphisme $\mu : X \rightarrow G_a$ qui est compatible avec les opérations de G_a sur X et sur G_a (par translations). Le lemme de Taylor est alors relié à l'énoncé général (et évident) suivant : soient $\mathfrak{C}$ une catégorie avec produits fibrés, G un groupe de $\mathfrak{C}$, X un G-objet (c'est-à-dire un objet muni d'une opération de G) et $\mu : X \rightarrow G$ un morphisme de G-objets. Si $\mu^{-1}(1)$ désigne l'image réciproque dans X de la section unité de G, le G-objet X est isomorphe à $G \times \mu^{-1}(1)$!

2. Idéaux Premiers de l'Algèbre Enveloppante de $\mathfrak{g}$

2.1. Soit $P = \sum a_{ij}p^iq^j$ un élément non nul de A_1. Tout idéal I contenant P contient $[p, P] = pP - Pp$ et $[q, P]$. Des formules $[p, p^iq^j] = jp^iq^{j-1}$ et $[q, p^iq^j] = -ip^{i-1}q^j$ on tire donc facilement que I contient une constante non nulle $a \in k \subset A_1$, c'est-à-dire que $I = A_1$. Le même raisonnement montre que le centre de A_1 est réduit à k. Considéré comme A_1-bimodule, c'est-à-dire comme module sur $A_1 \otimes A_1{}^0$, A_1 est donc simple et de commutant k. Pour tout espace vectoriel V sur k, les $A_1 \otimes A_1{}^0$-sous-modules de $A_1 \otimes V$ sont donc de la forme $A_1 \otimes U$ ([3], section 1, cor. 3, théor. 1). En particulier, si B est une k-algèbre, tout idéal de $A_1 \otimes B$ est de la forme $A_1 \otimes J$, où J est un idéal de B. Lorsque $B = A_{n-1}$, ceci montre par récurrence sur n que A_n n'a d'autres idéaux que 0 et A_n.

2.2. Disons qu'un idéal I de $U(\mathfrak{g})$ est *rationnel* si $Z(I)$ se réduit au corps des scalaires k.

Théorème (Dixmier). *Si I est un idéal de $U(\mathfrak{g})$, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *I est rationnel.*

(ii) *$U(\mathfrak{g})/I$ est ismorphe à $A_n(k)$ pour un certain n.*

(ii) $\Rightarrow$ (i) : résulte de 2.1; (i) $\Rightarrow$ (ii) : se démontre par récurrence sur $[\mathfrak{g} : k]$. Si $\mathfrak{z}_0 = I \cap \mathfrak{z} \neq 0$, on est ramené à étudier $U(\mathfrak{g}/\mathfrak{z}_0)/(I/U(\mathfrak{g})\,\mathfrak{z}_0)$. Sinon, $\mathfrak{z}$ est de dimension 1 et l'on a un isomorphisme

$$\psi : U(\mathfrak{g})_z \xrightarrow{\sim} A_1 \otimes U\left(\frac{\mathfrak{g}'}{ky}\right)_z . \tag{1.2.}$$

Si J est tel que $\psi(I_z) = A_1 \otimes J_z$, on a

$$\frac{U(\mathfrak{g})}{I} \simeq \frac{U(\mathfrak{g})_z}{I_z} \simeq A_1 \otimes \frac{U(\mathfrak{g}'/ky)_z}{J_z} \simeq A_1 \otimes \frac{U(\mathfrak{g}'/ky)}{J};$$

l'assertion en résulte, $\mathfrak{g}'/ky$ étant de dimension plus petite que $\mathfrak{g}$.

2.3. Comme $\{0\}$ est un idéal maximal de $A_n(k)$, 2.2. montre *qu'un idéal rationnel est maximal.* Considérons plus généralement un idéal premier I de $U(\mathfrak{g})$. Alors $Z(I)$ est intègre et $k(I)$ est un corps.

COROLLAIRE. *Pour tout idéal premier I de $U(\mathfrak{g})$, $k(I) \otimes_{Z(I)} (U(\mathfrak{g})/I)$ est isomorphe à $A_n(k(I))$ pour un certain n. En particulier,* 0 *est le seul diviseur de* 0 *de $U(\mathfrak{g})/I$.*

Identifions en effet $k(I) \otimes_k U(\mathfrak{g})$ à $U(k(I) \otimes_k \mathfrak{g})$ et soit J le noyau de l'homomorphisme surjectif

$$h : k(I) \underset{k}{\otimes} U(\mathfrak{g}) \to k(I) \underset{Z(I)}{\otimes} \frac{U(\mathfrak{g})}{I}$$

tel que

$$h\left(\lambda \underset{k}{\otimes} x\right) = \lambda \underset{Z(I)}{\otimes} \bar{x},$$

où $\bar{x} = x \bmod I$. Comme $k(I)$ est plat sur $Z(I)$ et que $U(\mathfrak{g})/I$ est engendrée par un nombre fini d'éléments, $k(I)$ est le centre de $k(I) \otimes_{Z(I)} (U(\mathfrak{g})/I)$. Par conséquent J est rationnel (sur $k(I)$!) et il suffit d'appliquer 2.2. à l'algèbre de Lie $k(I) \otimes_k \mathfrak{g}$ sur $k(I)$.

Comme $U(\mathfrak{g})/I$ est contenu dans $k(I) \otimes_{Z(I)} (U(\mathfrak{g})/I)$ (en effet ce dernier anneau est obtenu en localisant $U(\mathfrak{g})/I$ par rapport aux éléments t non nuls de $Z(I)$; comme $\{0\}$ est un idéal premier de $U(\mathfrak{g})/I$, t ne divise pas 0) et que $A_n(k(I))$ est sans diviseur de 0, il en va de même pour $U(\mathfrak{g})/I$.

2.4. Le raisonnement que nous venons de faire montre en réalité un peu plus : soit I un idéal tel que $Z(I)$ soit intègre. Alors $k(I) \otimes_{Z(I)} U(\mathfrak{g})/I)$ est isomorphe à $A_n(k(I))$, donc est intègre. Par conséquent, le noyau de l'application canonique de $U(\mathfrak{g})/I$ dans $k(I) \otimes_{Z(I)} (U(\mathfrak{g})/I)$, c'est-à-dire l'ensemble des $u \in U(\mathfrak{g})/I$ annulant un élément non nul de $Z(I)$, est un idéal premier. En particulier, *si $Z(I)$ est intègre et si* 0 *est le seul diviseur de zéro de $Z(I)$ dans $U(\mathfrak{g})/I$, I est premier.* On applique ceci dans le

COROLLAIRE. *Pour tout idéal I de $U(\mathfrak{g})$, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *I est maximal.*

(ii) *Le centre de $U(\mathfrak{g})/I$ est un corps.*

(iii) *I est premier et $k(I)$ est une extension algébrique de rang fini de k.*

(i) $\Rightarrow$ (iii) : dire que I est maximal, c'est dire que $U(\mathfrak{g})/I$ est un $U(\mathfrak{g})$-bimodule simple; le commutant d'un tel module simple, c'est-à-dire le centre

$Z(I)$ de $U(\mathfrak{g})/I$, est alors un corps; donc $Z(I) = k(I)$ et l'on a un isomorphisme $\varphi : U(\mathfrak{g})/I \simeq A_n(k(I))$. Si $x_1, \ldots, x_r$ est une base de $\mathfrak{g}$ sur k, on a

$$\varphi(x_i \bmod I) = \sum a^i_{\alpha_1,\beta_1,\ldots,\alpha_n,\beta_n} \cdot p^{\alpha_1}q^{\beta_1}p^{\alpha_2}q^{\beta_2} \cdots p^{\alpha_n}q^{\beta_n},$$

ce qui montre que l'image de φ est contenu dans $A_n(R)$, où R est la k-algèbre engendrée par les éléments $a^i_{\alpha_1,\beta_1,\ldots,\alpha_n\beta_n}$. On voit donc que $k(I) = R$ est une algèbre de type fini sur k, donc est algébrique de dimension finie sur k.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) : est clair, parce-que toute sous-algèbre d'une extension algébrique est un corps.

(ii) $\Rightarrow$ (i) : car, si $Z(I) = k(I)$, I est premier d'après ce qui précède et $U(\mathfrak{g})/I$ est isomorphe à $A_n(k(I))$, qui a $\{0\}$ et $A_n(k(I))$ pour seuls idéaux.

2.5. Soit M un $U(\mathfrak{g})$-module à gauche injectif indécomposable. Soit I l'idéal premier associé à M; on a donc $I = \operatorname{Sup}(\operatorname{Ann} N)$, où N parcourt les sous-modules non nuls de M. L'annulateur $M(I)$ de I dans M est alors un module injectif indécomposable sur $U(\mathfrak{g})/I$ qui a 0 pour idéal premier associé. Réciproquement, M est l'enveloppe injective de $M(I)$, considéré comme $U(\mathfrak{g})$-module. On obtient ainsi une bijection entre l'ensemble des types de $U(\mathfrak{g})$-modules injectifs indécomposables associés à I et celui des $(U(\mathfrak{g})/I)$-modules injectifs indécomposables associés à l'idéal $\{0\}$. Si t est un élément non nul de $Z(I)$, t n'annule aucun sous-module de $M(I)$, de sorte que l'homothétie de $M(I)$ de rapport t est injective, donc bijective; par conséquent $M(I)$ est un module sur l'anneau localisé $k(I) \otimes_{Z(I)} (U(\mathfrak{g})/I)$. Comme $\{0\}$ est le seul idéal propre de cet anneau, on a :

COROLLAIRE. *Pour tout idéal premier I de $U(\mathfrak{g})$ et tout isomorphisme*

$$A_n(k(I)) \xrightarrow{\sim} k(I) \underset{Z(I)}{\otimes} \frac{U(\mathfrak{g})}{I},$$

l'application $M \mapsto M(I)$ définit une bijection de l'ensemble des types de $U(\mathfrak{g})$-modules injectifs indécomposables associés à I sur celui des types de $A_n(k(I))$-modules injectifs indécomposables.

2.6. La classification des modules injectifs indécomposables sur $U(\mathfrak{g})$ se décompose ainsi en celle des idéaux premiers de $U(\mathfrak{g})$ (section 4) et celle des injectifs indécomposables sur les anneaux $A_n(k(I))$. On sait que cette dernière est reliée à la dimension de Krull de $A_n(k(I))$: de façon précise, si $\mathfrak{C}_i$ désigne la catégorie des $A_n(k(I))$-modules à gauche dont la dimension de Krull est $\leqslant i$, et si $\mathfrak{C}$ est la catégorie de tous les modules, les types d'injectifs indécomposables de $\mathfrak{C}$ correspondent biunivoquement aux types d'objets simples des différentes catégories $\mathfrak{C}/\mathfrak{C}_i$ ([7], IV et V). Pour cette raison, il serait intéressant de préciser les résultats partiels suivants :

PROPOSITION. *On a* $K\dim A_1 = 1$ *et* $1 \leqslant K\dim A_{n+1} - K\dim A_n \leqslant 2$. *En particulier,* $n \leqslant K\dim A_n \leqslant 2n - 1$ *si* $n \geqslant 1$, *et* A_m *n'est pas isomorphe à* A_n *pour* $m \neq n$.

En effet, on remarque tout d'abord qu'aucun A_1-module non nul M n'est de dimension finie sur k. Car l'égalité des traces $\operatorname{Tr}(pq) = \operatorname{Tr}(qp)$ et $pq - qp = 1$ entraîneraient que $0 = \operatorname{Tr}(1) = [M : k]$! Soit donc a un idéal à gauche non nul de A_1 et $A_1 = a_0 \supset a_1 \supset a_2 \cdots$ une suite strictement décroissante d'idéaux à gauche *contenant* a. Passant au gradué associé (section 0.2.), on en déduit une suite strictement décroissante d'idéaux gradués

$$k[X, Y] \simeq \operatorname{Gr}(A_1) \supset \operatorname{Gr}(a_1) \supset \operatorname{Gr}(a_2) \supset \cdots \supset \operatorname{Gr}(a) \neq 0$$

telle que les quotients $\operatorname{Gr}(a_i)/\operatorname{Gr}(a_{i+1})$ soient de dimension infinie sur k. Comme $\operatorname{Gr}_s(A_1)/\operatorname{Gr}_s(a)$ est de dimension constante sur k pour s assez grand, la suite des $\operatorname{Gr}(a_i)$ est finie, de même que la suite des a_i. Nous avons donc montré que, *pour tout idéal à gauche* $a \neq 0$, A_1/a *est de longueur finie.* Comme A_1 n'est pas de longueur finie lui-même (considérer la suite des idéaux à gauche $A_1 q^i$), on a $K\dim A_1 = 1$.

Considérons maintenant A_{n+1}, qui est engendré par A_n et des éléments p, q commutant avec A_n et tels que $pq - qp = 1$. Les éléments de A_{n+1} s'écrivent de manière unique sous la forme $\sum a_{\alpha\beta} p^\alpha q^\beta$, où $a_{\alpha\beta} \in A_n$. Si nous filtrons A_{n+1} à l'aide du degré total en p, q, le gradué associé $\operatorname{Gr}(A_{n+1})$ est l'anneau gradué $A_n[X, Y]$ des polynômes en 2 indéterminées à coefficients dans A_n. La dimension de Krull de cet anneau gradué est $K\dim A_n + 2$ ([7], V). D'après loc. cit., on a donc $K\dim A_{n+1} \leqslant K\dim A_n + 2$.

Considérons d'autre part le A_1-module $A_1/A_1 q$ qui est simple et a k pour commutant. D'après [3] loc. cit., les $A_n \otimes A_1$-sous-modules de $A_n \otimes (A_1/A_1 q)$ sont de la forme $M \otimes (A_1/A_1 q)$, où M est un idéal à gauche de A_n. Comme la dimension de Krull dépend seulement du treillis des sous-modules on a

$$K\dim A_n = K\dim A_n \otimes \frac{A_1}{A_1 q}$$

Par conséquent, la suite infinie

$$A_{n+1} \simeq A_n \otimes A_1 \supset A_n \otimes A_1 q \supset A_n \otimes A_1 q^2 \supset A_n \otimes A_1 q^3 \supset \cdots$$

a pour quotients des A_{n+1}-modules dont la dimension de Krull vaut $K\dim A_n$. Ceci montre que $K\dim A_{n+1} \geqslant K\dim A_n + 1$.

Notre corollaire signifie en particulier que les injectifs indécomposables sur A_1 sont les enveloppes injectives des modules simples de A_1 (cette dernière enveloppe coïncidant avec le corps des fractions de A_1).

On rapprochera aussi notre corollaire des inégalités dues à Rinehart [*10*], et concernant la dimension homologique :

$$n \leqslant dhA_n \leqslant 2n - 1 \qquad \text{si} \qquad n \geqslant 1.$$

2.7. Lorsqu'on connait les modules injectifs M sur $U(\mathfrak{g})/I$, il reste à construire les enveloppes injectives de ces M en tant que modules sur $U(\mathfrak{g})$. Là encore, on a un résultat partiel :

PROPOSITION. *Si M est annulé par l'idéal I de $U(\mathfrak{g})$, l'enveloppe injective de M est réunion de sous-modules annulés par les idéaux I^n, $n > 0$.*

La démonstration s'appuie sur un résultat de McConnell [*8*] assurant que I a une suite de générateurs $r_1, r_2, \ldots, r_n$ tels que

$$r_1 \in Z(\mathfrak{g}), \qquad (r_2 \bmod r_1 U(\mathfrak{g})) \in Z(r_1 U(\mathfrak{g})), \ldots, (r_n \bmod I_{n-1}) \in Z(I_{n-1}),$$

I_m désignant l'idéal engendré par $r_1, \ldots, r_m$ (si $t \neq 0$, il y a un s tel que $((\operatorname{ad} \mathfrak{g})^s t \neq 0$ et $(\operatorname{ad} \mathfrak{g})^{s+1} t = 0$; prendre alors t dans I et r_1 dans $(\operatorname{ad} \mathfrak{g})^s t$; de même, si $t \notin I_1$, il y a un s tel que $(\operatorname{ad} \mathfrak{g})^s t \notin I_1$ et $(\operatorname{ad} \mathfrak{g})^{s+1} t \in I_1$; prendre t dans I et r_2 dans $(\operatorname{ad} \mathfrak{g})^s t, \ldots$). Il suffit d'ailleurs de supposer M noethérien et de montrer que toute extension essentielle noethérienne N de M est annulée par une puissance de I ([*7*], chap. II) :

Soit r_N l'homothétie de N de rapport r_1. Pour s grand, on a l'égalité de Fitting $\operatorname{Im} r_N{}^s \cap \operatorname{Ker} r_N{}^s = 0$, donc $\operatorname{Im}{}_N{}^s = 0$ puisque $\operatorname{Ker} r_N{}^s \supset M$ et que N est extension essentielle de M. Soit t le plus petit s tel que $r_N{}^s = 0$; nous raisonnons par récurrence sur t et n. L'homothétie r_N définit une injection de $N/\operatorname{Ker} r_N$ dans $\operatorname{Ker} r_N^{t-1}$; il suffit donc qu'on ait $I^s \cdot (\operatorname{Ker} r_N^{t-1}) = I^s \cdot (\operatorname{Ker} r_N) = 0$ pour s grand. Or $\operatorname{Ker} r_N$ est un module sur $U(\mathfrak{g})/I_1$, de sorte que la récurrence sur n fonctionne; pour $\operatorname{Ker} r_N^{t-1}$, la récurrence sur t fonctionne (*on remarquera que la proposition vaut chaque fois que I a une suite de générateurs vérifiant les propriétés précédentes*; voir [*8*] et [*9*] pour plus de détails).

2.8. COROLLAIRE. *Si $M \subset N$ sont des modules noéthériens, la topologie I-adique de M est induite par la topologie I-adique de N.*

Confer [*7*], V, section 5 : pour tout s, soit $N' \subset N$ tel que $N' \cap M = I^s M$ et que M' soit maximal pour cette propriété. Alors N/N' est extension essentielle de $M/I^s M$, donc est annulé par I^t, pour t grand : $M \cap I^t N \subset I^s M$.

On en déduit un résultat de McConnell [*8*] : soit $I^\omega = \bigcap_s I^s$. La topologie induite dans I^ω par la topologie I-adique de $U(\mathfrak{g})$ est grossière; donc $I \cdot I^\omega = I^\omega$. La même chose vaut pour tout sous-module; donc si $x \in I^\omega$, on a $I \cdot (U(\mathfrak{g})\, x) = U(\mathfrak{g})\, x$ et $x \in I \cdot (U(\mathfrak{g})\, x) = I \cdot x$; on a donc $x(1 - y) = 0$, où $y \in I$; d'où $x = 0 : \bigcap_s I^s = 0$.

3. Algèbre Symétrique de $\mathfrak{g}$

Dans ce qui suit, on notera $\mathfrak{h} \times_\rho \mathfrak{g}$ le produit semi-direct d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ par une algèbre de Lie commutative $\mathfrak{h}$, relativement à une certaine opération de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{h}$ qui ne sera pas toujours explicitée ([7], section 1, nr 8).

3.1. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, $\tilde{\mathfrak{g}}$ le produit $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ et écrivons x_1 et y_2 au lieu de $(x, 0)$ et $(0, y)$. On munit l'espace vectoriel $\tilde{\mathfrak{g}}$ d'une structure d'algèbre de Lie au moyen des formules $[x_1, y_1] = 0$, $[x_1, y_2] = [x, y]_1$ et $[x_2, y_2] = [x, y]_2$; l'algèbre $\tilde{\mathfrak{g}}$ est donc un produit semi-direct de $\mathfrak{g}$ par l'algèbre de Lie commutative $\mathfrak{g}^A$ qui a même espace vectoriel sous-jacent que $\mathfrak{g}$.

Reprenons pour $\mathfrak{g}$ *les notations et hypothèses de* 0.4. On a donc $[x_2, y_1] = z_1$, z_1 appartient au centre de $\tilde{\mathfrak{g}}$ et l'annulateur $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}^A \times_\rho \mathfrak{g}'$ de y_1 estde codimension 1 dans $\tilde{\mathfrak{g}}$. D'après 1.2., on a un isomorphisme

$$\alpha : A_1 \bigotimes_k U(\mathfrak{g}_1/ky_1)_{z_1} \xrightarrow{\sim} U(\tilde{\mathfrak{g}})_{z_1}$$

D'autre part, les images $\bar{x}_1$, $\bar{y}_2$ et $\bar{z}_1$ de x_1, y_2 et z_1 dans $\mathfrak{g}_1/ky_1$ sont telles que : $[\bar{x}_1, \bar{y}_2] = \bar{z}_1$; l'annulateur $(\mathfrak{g}'^A/ky_1) \times_\rho \mathfrak{g}'$ de $\bar{y}_2$ est de codimension 1 dans $\mathfrak{g}_1/ky_1$ et son quotient par $k\bar{y}_2$ n'est autre que $\widetilde{\mathfrak{g}'/ky} = (\mathfrak{g}'/ky)^A \times_\rho (\mathfrak{g}'/ky)$. D'après 1.2., on a un isomorphisme

$$\beta : A_1 \bigotimes_k U\left(\widetilde{\frac{\mathfrak{g}'}{ky}}\right)_{z_1} \xrightarrow{\sim} U\left(\frac{\mathfrak{g}_1}{ky_1}\right)_{z_1}.$$

Si l'on compose $\alpha \circ (A_1 \otimes \beta)$ avec l'automorphisme de $A_2 \otimes U(\widetilde{\mathfrak{g}'/ky})_{z_1}$ qui envoie p_2, q_2 sur $-q_2$, p_2 et qui induit l'identité sur $A_1 \otimes k \otimes U(\widetilde{\mathfrak{g}'/ky})_{z_1}$, *on obtient finalement un isomorphisme d'algèbres*

$$\varphi : A_2 \otimes U\left(\widetilde{\frac{\mathfrak{g}'}{ky}}\right)_{z_1} \xrightarrow{\sim} U(\tilde{\mathfrak{g}})_{z_1}$$

tel que

$$\varphi(p_1) = x_2, \qquad \varphi(q_1) = \frac{y_1}{z_1}, \qquad \varphi(p_2) = -\frac{y_2}{z_1} + \frac{z_2 y_1}{z_1^2}, \qquad \varphi(q_2) = x_1,$$

$$\varphi(\bar{t}_1) = t_1 - [x, t]_1 \cdot \frac{y_1}{z_1} + [x, [x, t]]_1 \cdot \frac{y_1^2}{2z_1^2} - \cdots$$

$$+ \frac{(-1)^n}{n!} (\operatorname{ad} x_2)^n (t_1) \left(\frac{y_1}{z_1}\right)^n + \cdots$$

et

$$\varphi(\bar{t}_2) = t_2 - [x, t]_2 \cdot \frac{y_1}{z_1} + [x, [x, t]]_2 \cdot \frac{y_1^2}{2z_1} - \cdots$$

$$+ \frac{(-1)^n}{n!} (\mathrm{ad}\, x_2)^n (t_2) \left(\frac{y_1}{z_1}\right)^n + \cdots$$

$$- \frac{1}{z_1}\left(y_2 - z_2 \frac{y_1}{z_1}\right)\Big([x, t]_1 - [x[x, t]]_1 \cdot \frac{y_1}{z_1} + \cdots$$

$$+ \frac{(-1)^n}{n!} (\mathrm{ad}\, x_2)^{n+1} (t_1) \left(\frac{y_1}{z_1}\right)^n + \cdots\Big)$$

où $\bar{t}$ *est l'image dans* $\mathfrak{g}'/ky$ *d'un élément* $t \in \mathfrak{g}'$.

3.2. Soit $S(\mathfrak{g})$ l'algèbre symétrique de l'espace vectoriel $\mathfrak{g}$, que nous identifions à l'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{g}^A)$ et à la sous-algèbre de $U(\tilde{\mathfrak{g}})$ engendrée par les éléments t_1, $t \in \mathfrak{g}$. L'opération $(s, t) \mapsto [s, t]$ de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g}^A$ se prolonge en une opération de $\mathfrak{g}$ sur $S(\mathfrak{g})$, qui associe à $u \in \mathfrak{g}$ une dérivation D_u de $S(\mathfrak{g})$. Cette opération se prolonge en une opération de $\mathfrak{g}$ dans $S(\mathfrak{g}) \subset U(\tilde{\mathfrak{g}})$: $(s, t) \cdot P = s_1 \cdot P + t_2P - Pt_2 = s_1 \cdot P + D_tP$ si $(s, t) \in \tilde{\mathfrak{g}}$ et $P \in S(\mathfrak{g})$. Autrement dit, $S(\mathfrak{g})$ *est muni naturellement d'une structure de* $U(\tilde{\mathfrak{g}})$*-module*. Un sous-module de $S(\mathfrak{g})$ est un idéal *invariant*, c'est-à-dire un idéal stable pour les dérivations D_t.

Reprenons maintenant les hypothèses de 0.4. Ce qui précède s'applique à l'algèbre symétrique de $\mathfrak{g}'/ky$, qu'on identifie à une sous-algèbre de $U(\widetilde{\mathfrak{g}'/ky})$ et qui est munie naturellement d'une structure de module sur $U(\widetilde{\mathfrak{g}'/ky})$. Si $k[q_1, q_2]$ est la sous-algèbre de A_2 engendrée par q_1 et q_2 (et isomorphe à l'algèbre des polynômes $k[\xi, \eta]$ en deux indéterminées ξ et η), il est clair que l'isomorphisme φ de 3.1. induit un isomorphisme de $k[q_1, q_2] \otimes S(\mathfrak{g}'/ky)_z$ sur $S(\mathfrak{g})_z$; d'où le

THÉORÈME. *Sous les hypothèses faites en* 0.4., *il y a un isomorphisme de k-algèbres*

$$\theta : k[\xi, \eta] \underset{k}{\otimes} S\left(\frac{\mathfrak{g}'}{ky}\right)_z \to S(\mathfrak{g})_z$$

tel que $\theta(\xi) = y/z$, $\theta(\eta) = x$, *et*

$$\theta(\bar{t}) = t - (D_x t)\frac{y}{z} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}(D_x{}^n t)\frac{y^n}{z^n} + \cdots$$

où $\bar{t}$ *désigne l'image dans* $S(\mathfrak{g}'/ky)_z$ *d'un élément* t *de* $S(\mathfrak{g}')_z$, *et où* D_x *est la dérivation de* $S(\mathfrak{g})$ *définie par* x. *De plus,* θ *est compatible avec l'isomorphisme* φ

de 3.1. quand on munit $S(\mathfrak{g})_z$ *de la structure de* $U(\tilde{\mathfrak{g}})_{z_1}$*-module ci-dessus et* $k[\xi, \eta] \otimes_k S(\mathfrak{g}'/ky)_z$ *de la structure suivante de module sur* $A_2 \otimes_k U(\widetilde{\mathfrak{g}'/ky})_{z_1}$:

$$q_1(P \otimes \bar{t}) = (\xi P) \otimes \bar{t}, \qquad q_2(P \otimes \bar{t}) = (\eta P) \otimes \bar{t},$$

$$p_1(P \otimes \bar{t}) = \frac{\partial P}{\partial \xi} \otimes \bar{t}, \qquad p_2(P \otimes \bar{t}) = \frac{\partial P}{\partial \eta} \otimes \bar{t},$$

$$u(P \otimes \bar{t}) = P \otimes u\bar{t} \qquad \textit{lorsque} \qquad u \in U\left(\widetilde{\frac{\mathfrak{g}'}{ky}}\right)_{z_1}.$$

Il suffit en effet de montrer qu'on a $\theta(a \cdot x) = \varphi(a) \cdot \theta(x)$ si

$$x \in k[\xi, \eta] \underset{k}{\otimes} S\left(\frac{\mathfrak{g}'}{ky}\right)_z,$$

si $a = p_1, p_2, q_1, q_2$ ou bien si $a \in \widetilde{\mathfrak{g}'/ky}$. Cela est clair.

3.3. Pour tout $\mathfrak{g}$-module M, notons $M^{\mathfrak{g}}$ l'ensemble des $x \in M$ tels que $g \cdot x = 0$ si $g \in \mathfrak{g}$. D'autre part, pour tout n, faisons opérer l'algèbre A_n sur l'algèbre de polynômes $k[\xi_1, \ldots, \xi_n]$ au moyen des formules

$$p_i \cdot P = \frac{\partial P}{\partial \xi_i} \qquad \text{et} \qquad q_i \cdot P = \xi_i P.$$

Corollaire. *Soit J un idéal invariant de $S(\mathfrak{g})$ tel que $k = (S(\mathfrak{g})/J)^{\mathfrak{g}}$. Il y a alors un homomorphisme surjectif d'algèbres*

$$\psi : U(\tilde{\mathfrak{g}}) \to A_{2n}$$

et un isomorphisme $\chi : S(\mathfrak{g})/J \xrightarrow{\sim} k[\xi_1, \ldots, \xi_{2n}]$, qui est compatible avec ψ et les structures de module de $S(\mathfrak{g})/J$ et $k[\xi_1, \ldots, \xi_n]$ sur $U(\tilde{\mathfrak{g}})$ et A_{2n}.

Se démontre par récurrence sur la dimension de $\mathfrak{g}$. Soit $\mathfrak{z}$ le centre de $\mathfrak{g}$. Si $\mathfrak{z}_0 = J \cap \mathfrak{z} \neq 0$, on est ramené à un énoncé analogue pour $U(\widetilde{\mathfrak{g}/\mathfrak{z}_0})$ et $S(\mathfrak{g}/\mathfrak{z}_0)$. Sinon, l'hypothèse $k = (S(\mathfrak{g})/J)^{\mathfrak{g}}$ entraîne que $\mathfrak{z}$ est de dimension 1, donc que $\mathfrak{g}$ contient des éléments x, y, z vérifiant les conditions de 0.4. On peut donc appliquer le théorème 3.2. Comme $k[\xi, \eta]$ est un A_2-module simple de commutant k, les A_2-sous-modules de $k[\xi, \eta] \otimes_k S(\mathfrak{g}'/ky)_z$ sont de la forme $k[\xi, \eta] \otimes V$. Il s'ensuit que J_z est de la forme $\theta(k[\xi, \eta] \otimes J_z')$, où J' est un idéal invariant de $S(\mathfrak{g}'/ky)$ tel que $k = (S(\mathfrak{g}'/ky)/J')^{\mathfrak{g}'/ky}$. On applique l'hypothèse de récurrence à J' en remarquant que $S(\mathfrak{g})/J \simeq S(\mathfrak{g})_z/J_z$ parce-que l'image de z dans $S(\mathfrak{g})/J$ est un scalaire.

Ce corollaire entraîne en particulier que *J est premier et est un idéal invariant maximal de* $S(\mathfrak{g})$. Nous dirons dorénavant que J est *rationnel* (ce qui signifiera que J est invariant et qu'on a $k \simeq (S(\mathfrak{g})/J)^{\mathfrak{g}}$

3.4. Soit plus généralement J un idéal invariant de $S(\mathfrak{g})$ tel que $A(J) = (S(\mathfrak{g})/J)^{\mathfrak{g}}$ soit intègre et soit $k'(J)$ le corps des fractions de $A(J)$. Comme $k'(J) \otimes_{A(J)} (S(\mathfrak{g})/J)$ a $k'(J)$ pour anneau des invariants et s'identifie à un quotient de $S(k'(J) \otimes \mathfrak{g})$, 3.3. montre que

$$k'(J) \underset{A(J)}{\otimes} \frac{S(\mathfrak{g})}{J} \xrightarrow{\sim} k'(J)\,[\xi_1, ..., \xi_{2n}]$$

et que $k'(J)\,[\xi_1, ..., \xi_{2n}]$ a 0 et l'anneau tout entier pour seuls idéaux invariants. En particulier:

Corollaire. *Si J est un idéal invariant de $S(\mathfrak{g})$, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *J est invariant maximal.*

(ii) *$A(J)$ est un corps.*

(iii) *J est un idéal premier invariant et $A(J)$ est une extension algébrique de dimension finie de k.*

(ii) $\Rightarrow$ (i) : résulte de la formule ci-dessus, car $A(J) = k'(J)$;

(iii) $\Rightarrow$ (ii) : clair;

(i) $\Rightarrow$ (iii) : si J est invariant maximal, $A(J)$ est le commutant du $U(\tilde{\mathfrak{g}})$-module simple $S(\mathfrak{g})/J$, donc est un corps contenu dans une k-algèbre de type fini.

3.5. Soient e^u l'automorphisme exp (ad u) de $\mathfrak{g}$ défini par $u \in \mathfrak{g}$ et $\Gamma(k)$ ou Γ le groupe engendré par ces e^u (comme $\mathfrak{g}$ est nilpotente, on sait en réalité que ces e^u forment déjà un sous-groupe du groupe linéaire $GL(\mathfrak{g})$, mais ce résultat n'est pas indispensable dans la suite). Le groupe $\Gamma(k)$ opère sur $S(\mathfrak{g})$ et sur l'espace dual $\mathfrak{g}^*$ par l'opération contragrédiente. Si l'on interprète $S(\mathfrak{g})$ comme algèbre de fonctions-polynômes sur $\mathfrak{g}^*$, on a $(e^u \cdot F)(m) = F(e^{-u} \cdot m)$, lorsque $m \in \mathfrak{g}^*$ et $F \in S(\mathfrak{g})$. D'autre part, avec les notations de 3.2. on a évidemment

$$e^{\lambda x} \cdot \theta(P(\xi, \eta) \otimes \bar{t}) = \theta(P(\xi + \lambda, \eta) \otimes \bar{t}) = P\left(\frac{y}{z} + \lambda, x\right) \cdot \theta(\bar{t})$$

$$e^{\mu y} \cdot \theta(P(\xi, \eta) \otimes \bar{t}) = P\left(\frac{y}{z}, x - \frac{\mu}{z}\right) \cdot \theta(\bar{t}). \qquad (*)$$

Les $U(\tilde{\mathfrak{g}})$-sous-modules de $S(\mathfrak{g})$ coïncident avec les idéaux de $S(\mathfrak{g})$ globalement invariants sous l'action de $\Gamma(k)$: car si I est un sous-module de $S(\mathfrak{g})$ et D_u la dérivation de $S(\mathfrak{g})$ associée à $u \in \mathfrak{g}$, l'égalité

$$e^u \cdot F = F + D_u F + \frac{1}{2!} D_u^2 F + \cdots$$

montre que $e^u \cdot F \in I$. La réciproque résulte de la formule

$$D_u F = (\mathrm{Log}\,(\exp D_u))F = (e^u - 1)F - \tfrac{1}{2}(e^u - 1)^2 F + \tfrac{1}{3}(e^u - 1)^2 F - \cdots .$$

Ceci donne une interprétation géométrique des idéaux invariants J tels que $k = (S(\mathfrak{g})/J)^{\mathfrak{g}}$: si $m \in \mathfrak{g}^*$, soient $\mathfrak{m}(m)$ l'idéal formé des $F \in S(\mathfrak{g})$ tels que $F(m) = 0$ et $J(m)$ l'intersection des $\gamma \cdot \mathfrak{m}(m)$, $\gamma \in \Gamma(k)$; cet idéal est formé fonctions s'annulant sur l'orbite ω de m, et sera aussi noté $J(\omega)$. Si la classe de $F \in S(\mathfrak{g})$ modulo $J(m)$ appartient à $(S(\mathfrak{g})/J(m))^{\mathfrak{g}}$, c'est-à-dire si $\gamma \cdot F - F \in J(m)$ pour tout γ, on a

$$(F - F(m))\,(\gamma^{-1}m) = F(\gamma^{-1}m) - F(m) = (\gamma F - F)\,(m) = 0,$$

ce qui montre que F est congru au scalaire $F(m)$ modulo $J(m)$, donc que $J(m)$ est rationnel.

COROLLAIRE. *L'application $\omega \mapsto J(\omega)$ met en correspondance biunivoque les orbites ω de $\Gamma(k)$ dans $\mathfrak{g}^*$ et les idéaux invariants rationnels de $S(\mathfrak{g})$.*

L'application est surjective : en effet, si $k = (S(\mathfrak{g})/J)^{\mathfrak{g}}$, on a $S(\mathfrak{g})/J \simeq k[\xi_1, ..., \xi_{2n}]$ d'après 3.3., de sorte qu'il y a des homomorphismes d'algèbres $f : S(\mathfrak{g}) \to k$ dont le noyau contient J. Si $m = f \mid \mathfrak{g}$, $J(m)$ contient J; donc $J(m) = J$, puisque J est maximal (3.3.).

L'application est injective : soient $m_1, m_2 \in \mathfrak{g}^*$ tels que $J(m_1) = J(m_2) = J$; il s'agit de trouver un $\gamma \in \Gamma(k)$ tel que $m_2 = \gamma m_1$. Si $\mathfrak{z}$ est le centre de $\mathfrak{g}$ et si $\mathfrak{z}_0 = J \cap \mathfrak{z} \neq 0$, on peut remplacer $\mathfrak{g}$ par $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}_0$ et supposer la preuve établie (récurrence sur $[\mathfrak{g} : k]$). Sinon, on peut reprendre les notations de 0.4., 3.1., et 3.2. : alors $\mathfrak{m}(m_i)$ et J ne contiennent pas $z \in \mathfrak{z}$, qui est congru à un scalaire modulo J; et les formules (*) montrent qu'on peut supposer que $\mathfrak{m}(m_i)$ contient x et y $(i = 1, 2)$, quitte à remplacer m_i par $e^{\lambda x + \mu y} \cdot m_i$. Posons alors

$$\mathfrak{m}_i = \theta^{-1}(\mathfrak{m}(m_i)_z) \cap S\left(\frac{\mathfrak{g}'}{ky}\right).$$

D'après l'hypothèse de récurrence, il y a un $\bar{u} \in \mathfrak{g}'/ky$ tel que $e^{\bar{u}} \cdot \mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m}_2$. Si u est un représentant de $\bar{u}$ dans $\mathfrak{g}'$, la formule de 3.1. donnant $\varphi(\bar{t}_2)$ montre que $e^u \cdot \theta(\mathfrak{m}_1) \subset \theta(\mathfrak{m}_2) + S(\mathfrak{g})_z \cdot y$, donc que $e^u \cdot \mathfrak{m}(m_1) = \mathfrak{m}(m_2)$ et $e^{-u} m_1 = m_2$.

3.6. *Remarque.* Les énoncés 3.3. et 3.5. sont à rapprocher des résultats bien connus de géométrie algébrique assurant que les orbites d'un groupe algébrique unipotent G opérant sur une variété algébrique affine X sont fermées (Rosenlicht), sont des espaces affins et que les points rationnels de G opèrent transitivement sur les points rationnels d'une orbite. Le corollaire 3.5. peut être prouvé directement à partir de là, mais nous avons préféré nous limiter à des méthodes "élémentaires."

4. Comparaison des Idéaux Rationnels des Algèbres Enveloppante et Symétrique

4.1. Rappelons rapidement la construction de Dixmier mettant en correspondance biunivoque les orbites du groupe $\Gamma(k)$ de 3.4. dans $\mathfrak{g}^*$ et les idéaux rationnels de $U(\mathfrak{g})$: si $f \in \mathfrak{g}^*$, *une sous-algèbre* $\mathfrak{h}$ *de* $\mathfrak{g}$ *est dite liée à* f *si* $\mathfrak{h}$ *est de dimension maximum* parmi les sous-algèbres $\mathfrak{k}$ de $\mathfrak{g}$ telles que $[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset f^{-1}(0)$. Dans ce cas, on note $\mathfrak{m}(\mathfrak{h}, f)$ l'idéal à gauche de $U(\mathfrak{g})$ engendré par les éléments $h - f(h)$ ($h \in \mathfrak{h}$), et $I(\mathfrak{h}, f)$ le plus grand idéal contenu dans $\mathfrak{m}(\mathfrak{h}, f)$.

Théorème (Dixmier). *Si* $f \in \mathfrak{g}^*$ *et si* $\mathfrak{h}$ *est une sous-algèbre de* $\mathfrak{g}$ *liée à* f, $I(\mathfrak{h}, f)$ *est un idéal rationnel de* $U(\mathfrak{g})$. *Tout idéal rationnel est de cette forme et l'on a* $I(\mathfrak{h}, f) = I(\mathfrak{k}, g)$ *si et seulement si* f *et* g *appartiennent à la même orbite de* $\mathfrak{g}^*$ *sous* $\Gamma(k)$.

Nous pouvons supposer la démonstration faite pour les algèbres de Lie commutatives et celles de dimension plus petite que $\mathfrak{g}$. Alors :

4.1.1. Si, sous les conditions de 0.4., on a $f(z) = \lambda \neq 0$, on peut, quitte à ajouter à x et y des multiples de z, supposer qu'on a $f(x) = f(y) = 0$. Si l'on pose $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}' + ky$, on a $[\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_1] \subset f^{-1}(0)$ et $\mathfrak{h}_1$ est liée à f : en effet, si $\mathfrak{h} \not\subset \mathfrak{g}'$, alors $y \notin \mathfrak{h}$ et $\mathfrak{h}_1$ a même dimension que $\mathfrak{h}$; si $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}'$, on a $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1$. Il s'ensuit que $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h}_1/ky$ est liée à la forme linéaire f' sur $\mathfrak{g}'/ky$ induite par f.

D'autre part, les formules de 1.2. montrent que l'isomorphisme $\psi : U(\mathfrak{g})_z \to A_1 \otimes U(\mathfrak{g}'/ky)_z$ applique $\mathfrak{m}(\mathfrak{h}_1, f)_z$ dans l'idéal à gauche $\mathfrak{n}_1$ engendré par $q \otimes 1$ et $A_1 \otimes \mathfrak{m}(\mathfrak{h}', f')_z$. De même, les formules définissant ψ^{-1} montrent que $\psi^{-1}(\mathfrak{n}_1) \subset \mathfrak{m}(\mathfrak{h}_1, f)_z$, donc que $\psi(\mathfrak{m}(\mathfrak{h}_1, f)_z) = \mathfrak{n}_1$ et que $\psi(I(\mathfrak{h}_1, f)_z) = A_1 \otimes I(\mathfrak{h}', f')_z$.

Lorsque $\mathfrak{h} \not\subset \mathfrak{g}'$, on peut choisir x dans $\mathfrak{h}$ et $\psi(\mathfrak{m}(\mathfrak{h}, f))$ est alors l'idéal à gauche $\mathfrak{n}$ engendré par $p \otimes 1$ et $A_1 \otimes \mathfrak{m}(\mathfrak{h}', f')$. On a donc aussi $\psi(I(\mathfrak{h}, f)_z) = A_1 \otimes I(\mathfrak{h}', f')_z$, d'où $I(\mathfrak{h}, f)_z = I(\mathfrak{h}_1, f)_z$. La relation $z^n P - \lambda^n P \in U(\mathfrak{g})(z - \lambda)$ montre alors que

$$I(\mathfrak{h}, f) = U(\mathfrak{g}) \cap I(\mathfrak{h}, f)_z = U(\mathfrak{g}) \cap I(\mathfrak{h}_1, f)_z = I(\mathfrak{h}_1, f).$$

4.1.2. Montrons que $I(\mathfrak{h}, f)$ est rationnel: la relation $[\mathfrak{h} + \mathfrak{z}, \mathfrak{h} + \mathfrak{z}] = [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$ montre que $\mathfrak{z} \subset \mathfrak{h}$. Si $\mathfrak{z} \cap f^{-1}(0) = \mathfrak{z}_0 \neq 0$, on est ramené à prouver que $I(\mathfrak{h}/\mathfrak{z}_0, f_0)$ est rationnel, où f_0 est la forme linéaire induite sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}_0$ par f. Si $\mathfrak{z}_0 = 0$, $\mathfrak{z}$ est de dimension 1 et, d'après 4.1.1. on a

$$\frac{U(\mathfrak{g})}{I(\mathfrak{h}, f)} = A_1 \otimes \frac{U(\mathfrak{g}'/ky)}{I(\mathfrak{h}', f')}$$

pour un choix convenable de x, y, z; on est donc ramené à prouver que $I(\mathfrak{h}',f')$ est rationnel.

4.1.3. Montrons que $I(\mathfrak{h},f)$ ne dépend pas de $\mathfrak{h}$: si $\mathfrak{z}_0 \neq 0$, on est ramené à prouver que $I(\mathfrak{h}/\mathfrak{z}_0, f_0) = I(\mathfrak{k}, f_0)$ pour toute sous-algèbre $\mathfrak{k}$ de $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}_0$ liée à f_0. Si $\mathfrak{z}_0 = 0$, on a $\psi(I(\mathfrak{h},f)_z) = A_1 \otimes I(\mathfrak{h}',f')_z$ d'après 4.1.1. et l'on est ramené à prouver que $I(\mathfrak{h}',f') = I(\mathfrak{k},f')$ pour toute sous-algèbre $\mathfrak{k}$ de $\mathfrak{g}'/ky$ liée à f'.

4.1.4. Il est clair qu'un idéal à gauche $\mathfrak{m}$ de $U(\mathfrak{g})$ est bilatère si et seulement si $(\operatorname{ad} x)\, m = xm - mx \in \mathfrak{m}$ lorsque $x \in \mathfrak{g}$ et $m \in \mathfrak{m}$. Il s'ensuit comme en 3.5., que $\mathfrak{m}$ est bilatère si et seulement si $\mathfrak{m}$ est globalement invariant sous l'action du groupe $\Gamma(k)$; en particulier, on a

$$I(f) = I(\mathfrak{h},f) = \bigcap_{\gamma \in \Gamma(k)} \gamma \cdot \mathfrak{m}(\mathfrak{h},f).$$

Comme $\gamma \cdot \mathfrak{m}(\mathfrak{h},f) = \mathfrak{m}(\gamma\mathfrak{h}, \gamma^{-1}f)$, on a $I(f) = I(\gamma^{-1}f)$.

Réciproquement, supposons qu'on ait $I(\mathfrak{h},f) = I(\mathfrak{k},g)$. Si

$$\mathfrak{z}_0 = \mathfrak{z} \cap f^{-1}(0) = \mathfrak{z} \cap I(\mathfrak{h},f) = \mathfrak{z} \cap I(\mathfrak{k},g) = \mathfrak{z} \cap g^{-1}(0) \neq 0,$$

il y a, d'après l'hypothèse de récurrence, un $x_0 \in \mathfrak{g}/\mathfrak{z}_0$ tel que $e^{x_0} \cdot f_0 = g_0$ avec les notations de 4.1.3. et 3.5.; si x est un représentant de x_0 dans $\mathfrak{g}$, on a alors $e^x \cdot f = g$. Au contraire, si $\mathfrak{z}_0 = 0$, on peut choisir x, y, z comme en 4.1.1. Alors $f(z)$ et $g(z)$ coincident avec la valeur λ de z modulo $I(\mathfrak{h}, f) = I(\mathfrak{k}, g)$. La formule $(e^{\mu x} \cdot g)(y) = g(y) - \mu g(z)$ (resp. $(e^{\nu y} \cdot g)(x) = g(x) + \nu g(z)$) montre qu'on peut supposer qu'on a aussi $g(y) = 0$ (resp. $g(x) = 0$), quitte à remplacer g par un $e^{\mu x} \cdot g$ (resp. par un $e^{\nu y} \cdot g$). Si g' désigne alors la forme linéaire induite par g sur $\mathfrak{g}'/ky$, on a

$$A_1 \otimes I(f')_z = \psi(I(f)_z) = \psi(I(g)_z) = A_1 \otimes I(g')_z\,,$$

d'où $I(f') = I(g')$ et l'existence d'un $x' \in \mathfrak{g}'/ky$ tel que $e^{x'} \cdot f' = g'$; on en tire $e^x \cdot f = g$ si x relève x' (car on a déjà $f(x) = g(x) = f(y) = g(y) = 0$).

4.1.5. Il reste à voir que tout idéal rationnel I est de la forme $I(\mathfrak{h},f)$. Il est clair que, si $\mathfrak{z}_0 = I \cap \mathfrak{z} \neq 0$, on est ramené à l'idéal $I/U(\mathfrak{g})\,\mathfrak{z}_0$ de $U(\mathfrak{g}/\mathfrak{z}_0)$. Sinon, on choisit x, y, z comme en 0.4., de sorte qu'on a $\psi(I_z) = A_1 \otimes J_z$. Si $J = I(\mathfrak{h}',f')$, notons $\mathfrak{h}$ l'image réciproque de $\mathfrak{h}' \subset \mathfrak{g}'/ky$ dans $\mathfrak{g}'$ et f une forme linéaire sur $\mathfrak{g}$, nulle en y et induisant f'. Il est clair que $\mathfrak{h}$ est liée à $f \mid \mathfrak{g}'$. Si $\mathfrak{h}$ n'était pas liée à f, il y aurait une sous-algèbre $\mathfrak{k}$ de $\mathfrak{g}$ telle que $[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset f^{-1}(0)$ et $\dim \mathfrak{k} > \dim \mathfrak{h}$; alors $\mathfrak{k} \not\subset \mathfrak{g}'$ et $\mathfrak{k}_1 = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}' + ky$ serait liée à $f \mid \mathfrak{g}'$ (4.1.1.), bien que de dimension supérieure à $\dim \mathfrak{h}$. D'après 4.1.1., on a $\psi(I_z) = \psi(I(\mathfrak{h},f)_z)$, d'où $I = I(\mathfrak{h},f)$.

4.1.6. Appelons *poids* d'un idéal premier I de $U(\mathfrak{g})$ l'entier n tel que

$k(I) \otimes_{Z(I)} (U(\mathfrak{g})/I)$ soit isomorphe à $A_n(k(I))$. Cet entier est bien déterminé d'après 2.6.

COROLLAIRE. *Si* $\mathfrak{h}$ *est une sous-algèbre de* $\mathfrak{g}$ *liée à* $f \in \mathfrak{g}^*$, *on a*

$$[\mathfrak{g} : \mathfrak{f}] = [\mathfrak{h} : k] + \textit{poids de } I(\mathfrak{h}, f).$$

Se démontre comme la rationnalité de $I(\mathfrak{h}, f)$ par récurrence sur $[\mathfrak{g} : k]$.

4.2. *Nous adoptons les notations suivantes :* $\mathbf{I}(\mathfrak{g})$ (resp. $\mathbf{J}(\mathfrak{g})$) désigne l'ensemble des idéaux rationnels I de $U(\mathfrak{g})$ (resp. l'ensemble des idéaux rationnels J de $S(\mathfrak{g})$). Si $z \in \mathfrak{z}$, $\mathbf{I}(\mathfrak{g})_z$ et $\mathbf{J}(\mathfrak{g})_z$ désignent respectivement les parties de $\mathbf{I}(\mathfrak{g})$ et $\mathbf{J}(\mathfrak{g})$ formées des idéaux I et J ne contenant pas z. D'autre part, si $p : \mathfrak{f} \to \mathfrak{g}$ est une surjection d'algèbres de Lie, $\mathbf{I}(p)$ et $\mathbf{J}(p)$ désignent respectivement les applications qui associent à I et J les images réciproques de ces idéaux par les applications $U(p) : U(\mathfrak{f}) \to U(\mathfrak{g})$ et $S(p) : S(\mathfrak{f}) \to S(\mathfrak{g})$ induites par p.

Enfin, si x, y, z sont des éléments de $\mathfrak{g}$ vérifiant les conditions de 0.4., nous notons $\psi(x, y, z) : \mathbf{I}(\mathfrak{g})_z \xrightarrow{\sim} \mathbf{I}(\mathfrak{g}'/ky)_z$ (resp. $\eta(x, y, z) : \mathbf{J}(\mathfrak{g})_z \xrightarrow{\sim} \mathbf{J}(\mathfrak{g}'/ky)_z$) la bijection qui associe à I l'intersection de l'idéal $\psi(I)$ de $A_1 \otimes U(\mathfrak{g}'/ky)_z$ avec $U(\mathfrak{g}'/ky)$ (resp. à J l'intersection de l'idéal $\theta^{-1}(J)$ de $k[\xi, \eta] \otimes S(\mathfrak{g}'/ky)_z$ avec $S(\mathfrak{g}'/ky)$).

Ces notations étant précisées, rappelons que nous avons défini des bijections de $\mathbf{I}(\mathfrak{g})$ et $\mathbf{J}(\mathfrak{g})$ sur l'ensemble des orbites de $\mathfrak{g}^*$ sous $\Gamma(k)$, ce qui nous détermine une bijection

$$\alpha(\mathfrak{g}) : \mathbf{I}(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{J}(\mathfrak{g}).$$

PROPOSITION. *Les bijections* $\alpha(\mathfrak{g})$ *sont caractérisées par les propriétés suivantes :*

(i) *Lorsque* $\mathfrak{g}$ *est une algèbre de Lie commutative,* $\alpha(\mathfrak{g})$ *est induit par l'isomorphisme canonique de* $U(\mathfrak{g})$ *sur* $S(\mathfrak{g})$.

(ii) *Lorsque* $p : \mathfrak{f} \to \mathfrak{g}$ *est un homomorphisme surjectif d'algèbres de Lie, on a* $\mathbf{J}(p)\, \alpha(\mathfrak{g}) = \alpha(\mathfrak{f})\, \mathbf{I}(p)$.

(iii) *Si* x, y, z *sont des éléments de* $\mathfrak{g}$ *vérifiant les conditions de 0.4., on a un carré commutatif*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{I}(\mathfrak{g})_z \arrow[r, "\alpha(\mathfrak{g})", "\sim"'] \arrow[d, "\psi(x, y, z)"] & \mathbf{J}(\mathfrak{g})_z \arrow[d, "\eta(x, y, z)"] \\
\mathbf{I}(\mathfrak{g}'/ky)_z \arrow[r, "\alpha(\mathfrak{g}'/ky)", "\sim"'] & \mathbf{J}(\mathfrak{g}'/ky)_z
\end{tikzcd}$$

Que ces trois propriétés caractérisent les bijections $\alpha(\mathfrak{g})$ résulte évidemment de l'étude de $\mathbf{I}(\mathfrak{g})$ et $\mathbf{J}(\mathfrak{g})$ que nous avons faite par récurrence sur $[\mathfrak{g} : k]$. Réciproquement les propriétés (i) et (ii) sont claires. Montrons seulement (iii) : soit $I = I(\mathfrak{h}, f)$ un idéal rationnel de $U(\mathfrak{g})$ ne contenant pas z. Quitte à remplacer f par $e^{\mu x} \cdot f$, on peut supposer que $f(x) = f(y) = 0$ (4.1.4.). Mais alors, l'image de I par $\psi(x, y, z)$ est associé à la forme linéaire f' que f induit sur $\mathfrak{g}'/ky$ (4.1.1.). Dautre part, lorsque $f(x) = f(y) = 0$, les formules du théorème 3.2. montrent que $\theta^{-1}(\mathfrak{m}(f)_z)$ (3.4.) est l'idèal de $k[\xi, \eta] \otimes S(\mathfrak{g}'/ky)_z$ engendré par $\xi \otimes 1$, $\eta \otimes 1$ et $\mathfrak{m}(f')_z$. Par conséquent $\psi(x, y, z)$ et $\eta(x, y, z)$ envoient $I(f)$ et $J(f)$ respectivement sur $I(f')$ et $J(f')$.

4.2.1. COROLLAIRE. *Soient I et J des idéaux rationnels de $U(\mathfrak{g})$ et $S(\mathfrak{g})$ définis par la même orbite ω. Si $U(\mathfrak{g})/I$ est isomorphique à A_n, alors $S(\mathfrak{g})/J$ est isomorphe à $k[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{2n}]$.*

Se voit facilement par récurrence sur $[\mathfrak{g} : k]$ à partir de 4.2. La dimension de l'orbite ω (considérée comme variété algébrique) est donc le double du poids de $I(\omega)$.

5. COMPARAISON DES IDÉAUX PREMIERS DE $U(\mathfrak{g})$ ET $S(\mathfrak{g})$

5.1. Nous nous intéressons maintenant aux propriétés fonctorielles de $\mathbf{I}(\mathfrak{g})$ par rapport au corps de base : pout toute extension K du corps k, $\mathbf{I}(K \otimes \mathfrak{g})$ désigne l'ensemble des idéaux rationnels de l'algèbre enveloppante de la K-algèbre de Lie $K \otimes \mathfrak{g}$. Si $f : K \to L$ est un homomorphisme reliant deux extensions de k, nous notons $\mathbf{I}(f \otimes \mathfrak{g})$ l'application associant à $I \in \mathbf{I}(K \otimes \mathfrak{g})$ l'idéal rationnel $L \otimes_K I$ de $L \otimes_K U(K \otimes \mathfrak{g}) \simeq U(L \otimes \mathfrak{g})$. Nous déterminons ainsi un foncteur $\mathbf{I}(\,?\, \otimes \mathfrak{g})$, défini sur la catégorie des extensions de corps de k, à valeurs dans la catégorie des ensembles. Nous allons voir que ce foncteur peut être décrit à l'aide des idéaux premiers de $U(\mathfrak{g})$: en effet, soient $i : k \to K$ une extension de k et I un idéal rationnel de $U(K \otimes \mathfrak{g})$; l'injection i induit une injection $U(i) : U(\mathfrak{g}) \to U(K \otimes \mathfrak{g})$ et l'image réciproque de I par $U(i)$ est un idéal premier $\mathfrak{p}$ de $U(\mathfrak{g})$; de plus, $U(i)$ induit un homomorphisme de $U(\mathfrak{g})/\mathfrak{p}$ dans $U(K \otimes \mathfrak{g})/I$ qui envoie le centre $Z(\mathfrak{p})$ dans K et détermine un homomorphisme φ du corps des fractions $k(\mathfrak{p})$ de $Z(\mathfrak{p})$ dans K. A $I \in \mathbf{I}(K \otimes \mathfrak{g})$ nous avons donc associé l'élément φ du sommande d'indice $\mathfrak{p}$ de la somme disjointe $\coprod_{\mathfrak{q}} \mathrm{Hom}_k(k(\mathfrak{q}), K)$ ($\mathfrak{q}$ parcourt ici les idéaux premiers de $U(\mathfrak{g})$ et $\mathrm{Hom}_k(K, L)$ est l'ensemble des homomorphismes d'extensions de corps reliant K à L). Réciproquement, la donnée de $\mathfrak{p}$ et de $\varphi \in \mathrm{Hom}_k(k(\mathfrak{p}), K)$ détermine un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} U(\mathfrak{g}) & \xrightarrow{\quad i \quad} & K \otimes U(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\sim} U(K \otimes \mathfrak{g}) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle p} & & \Big\downarrow{\scriptstyle q} \\ k(\mathfrak{p}) \underset{Z(\mathfrak{p})}{\otimes} (U(\mathfrak{g})/\mathfrak{p}) & \xrightarrow{\varphi \otimes (U(\mathfrak{g})/\mathfrak{p})} & K \underset{Z(\mathfrak{p})}{\otimes} (U(\mathfrak{g})/\mathfrak{p}) \end{array}$$

où i, p et q sont les applications canoniques. Ceci permet d'associer à $\varphi \in \mathrm{Hom}_k(k(\mathfrak{p}), K)$ l'idéal rationnel $q^{-1}(0)$ de $U(K \otimes \mathfrak{g})$. Il est donc clair que l'application $I \mapsto \varphi$ est bijective et fonctorielle en K, de sorte qu'il nous sera permis d'identifier le foncteur $\mathbf{I}(\,?\otimes \mathfrak{g})$ à la somme directe $\coprod_{\mathfrak{q}} \mathrm{Hom}_k(k(\mathfrak{q}),\,?)$.

5.2. On définit de même un foncteur $\mathbf{J}(\,?\otimes \mathfrak{g})$, qui associe à toute extension K du corps de base k l'ensemble des idéaux rationnels de l'algèbre symétrique $S(K \otimes \mathfrak{g})$. Soient $i : k \to K$ une extension et J un idéal rationnel de $S(K \otimes \mathfrak{g})$. L'image réciproque de J dans $S(\mathfrak{g})$ est un idéal premier $\mathfrak{q}$ invariant sous l'action de $\Gamma(k)$. De plus, i induit un homomorphisme injectif de $S(\mathfrak{g})/\mathfrak{q}$ dans $S(K \otimes \mathfrak{g})/J$, qui applique l'anneau $A(\mathfrak{g})$ des invariants de $S(\mathfrak{g})/\mathfrak{q}$ dans K et qui définit par conséquent un homomorphisme ψ du corps des fractions $k'(\mathfrak{q})$ de $A(\mathfrak{q})$ dans K. Nous avons donc associé à $J \in \mathbf{J}(K \otimes \mathfrak{g})$ un élément ψ du sommande d'indice $\mathfrak{q}$ de la somme disjointe $\coprod_{\mathfrak{p}} \mathrm{Hom}_k(k'(\mathfrak{p}), K)$. Cette application $J \mapsto \psi$, qui est bijective, nous permet d'identifier $\mathbf{J}(\,?\otimes \mathfrak{g})$ au foncteur $\coprod_{\mathfrak{p}} \mathrm{Hom}_k(k'(\mathfrak{p}), K)$.

5.3. Soient K, L deux extensions de k, $\varphi : K \to L$ un homomorphisme, f une forme linéaire sur $K \otimes \mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de $K \otimes \mathfrak{g}$ liée à f. Il résulte de la formule des poids (4.1.6.) que $L \otimes_K \mathfrak{h}$ est liée à la forme linéaire $L \otimes_K f$ sur $L \otimes \mathfrak{g} \simeq L \otimes_K (K \otimes \mathfrak{g})$. Il s'ensuit que la formule

$$L \underset{K}{\otimes} I(\mathfrak{h}, f) = I\left(L \underset{K}{\otimes} \mathfrak{h}, L \underset{K}{\otimes} f\right)$$

montre que les applications

$$\alpha(K \otimes \mathfrak{g}) : \mathbf{I}(K \otimes \mathfrak{g}) \to \mathbf{J}(K \otimes \mathfrak{g})$$

de 4.2. définissent un isomorphisme fonctoriel

$$\alpha(\,?\otimes \mathfrak{g}) : \mathbf{I}(\,?\otimes \mathfrak{g}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{J}(\,?\otimes \mathfrak{g}).$$

D'après le lemme 5.4. ci-dessous, *un tel isomorphisme est déterminé par une bijection* $\beta(\mathfrak{g})$ *de l'ensemble des idéaux premiers de* $U(\mathfrak{g})$ *sur l'ensemble des idéaux premiers invariants de* $S(\mathfrak{g})$ *et par des isomorphismes d'extensions de corps*

$$\beta_{\mathfrak{p}} : k(\mathfrak{p}) \xrightarrow{\sim} k'(\beta(\mathfrak{g})\,\mathfrak{p}).$$

Cette bijection $\beta(\mathfrak{g})$ transforme donc idéaux rationnels en idéaux rationnels. Sur ces idéaux rationnels elle coïncide évidemment avec l'application $\alpha(\mathfrak{g})$ du section 4.2. D'autre part, le corollaire 2.4. montre que β transforme idéaux maximaux de $U(\mathfrak{g})$ en idéaux invariants maximaux de $S(\mathfrak{g})$.

Notons aussi que *les corps* $k'(\mathfrak{q})$ *sont des extensions de type fini* de k (ce sont des sous-extensions des corps des fractions des algèbres $S(\mathfrak{g})/\mathfrak{q}$). *Le même résultat vaut* donc *pour les corps* $k(\mathfrak{p})$, comme on aurait pu le voir directement à partir de 2.3.

5.4. LEMME. *Soient* **C** *une catégorie et* $(c_i)_{i\in I}$, $(d_j)_{j\in J}$ *deux familles d'objets de* **C**. *Tout isomorphisme fonctoriel*

$$\alpha : \coprod_{i\in I} \mathrm{Hom}_C(c_i\,,\ ?) \to \coprod_{j\in J} \mathrm{Hom}_C(d_j\,,\ ?)$$

est induit par une bijection $\beta : I \xrightarrow{\sim} J$ *et des isomorphismes*

$$\alpha_i : c_i \xrightarrow{\sim} d_{\beta(i)}\,.$$

Disons qu'un foncteur de **C** à valeurs dans la catégorie des ensembles est *connexe* s'il est non vide et s'il n'est pas réunion de deux sousfoncteurs non vides et disjoints; un foncteur représentable est toujours connexe; d'autre part, tout foncteur F est réunion de sous-foncteurs connexes disjoints, *les composantes connexes de* F. Un isomorphisme fonctoriel $F \xrightarrow{\sim} G$ est défini par une bijection de l'ensemble des composantes connexes de F sur celui de G et par des isomorphismes entre les composantes connexes associées de F et G. Le lemme en résulte.

5.5. On peut donner de la bijection $\beta(\mathfrak{g})$ de 5.3. une caractérisation analogue à celle de 4.2. Précisons d'abord les notations : soient Spec $U(\mathfrak{g})$ et (Spec $S(\mathfrak{g}))^\Gamma$ respectivement l'ensemble des idéaux premiers de $U(\mathfrak{g})$ et celui des idéaux premiers invariants de $S(\mathfrak{g})$. Si $z \in \mathfrak{z}$, (Spec $U(\mathfrak{g}))_z$ et (Spec $S(\mathfrak{g}))_z{}^\Gamma$ désigneront les parties de Spec $U(\mathfrak{g})$ et de (Spec $S(\mathfrak{g}))^\Gamma$ formées des idéaux ne contenant pas z. Dans le cas où x, y, z sont des éléments de $\mathfrak{g}$ vérifiant les conditions de 0.4., nous étendons la définition des bijections $\psi(x, y, z)$ et $\eta(x, y, z)$ de 4.2. respectivement à tous les idéaux premiers de $U(\mathfrak{g})$ ne contenant pas z et à tous les idéaux premiers invariants de $S(\mathfrak{g})$ ne contenant pas z. *Avec ces notations, on a le*

SCHOLIE. *Lorsque* k *parcourt les corps de caractéristique* 0 *et* $\mathfrak{g}$ *les* k*-algèbres de Lie nilpotentes et de dimension finie, il existe des bijections*

$$\beta(\mathfrak{g}) : \mathrm{Spec}\ U(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\sim} (\mathrm{Spec}\ S(\mathfrak{g}))^\Gamma$$

déterminées de manière unique par les conditions suivantes :

(i) *Lorsque* $\mathfrak{g}$ *est commutative,* $\beta(\mathfrak{g})$ *est induite par l'isomorphisme canonique de* $U(\mathfrak{g})$ *sur* $S(\mathfrak{g})$.

(ii) *Lorsque* $p : \mathfrak{k} \to \mathfrak{g}$ *est un homomorphisme surjectif d'algèbres de Lie sur* k, *on a le carré commutatif*

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Spec} U(\mathfrak{g}) & \xrightarrow{\beta(\mathfrak{g})} & \operatorname{Spec} (S(\mathfrak{g}))^{\Gamma} \\ {\scriptstyle p_1}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle p_2} \\ \operatorname{Spec} U(\mathfrak{k}) & \xrightarrow{\beta(\mathfrak{k})} & \operatorname{Spec} (S(\mathfrak{k}))^{\Gamma} \end{array}$$

en notant p_1 *et* p_2 *les applications associant à un idéal de* $U(\mathfrak{g})$ *ou* $S(\mathfrak{g})$ *son image réciproque dans* $U(\mathfrak{k})$ *ou* $S(\mathfrak{k})$.

(iii) *Lorsque* $i : k \to K$ *est une extension de corps, on a le carré commutatif*

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Spec} U\left(K \underset{k}{\otimes} \mathfrak{g}\right) & \xrightarrow{\beta(K \otimes_k \mathfrak{g})} & \left(\operatorname{Spec} S\left(K \underset{k}{\otimes} \mathfrak{g}\right)\right)^{\Gamma(K)} \\ {\scriptstyle i_1}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle i_2} \\ \operatorname{Spec} U(\mathfrak{g}) & \xrightarrow{\beta(\mathfrak{g})} & (\operatorname{Spec} S(\mathfrak{g}))^{\Gamma(k)} \end{array}$$

en notant encore i_1 *et* i_2 *les applications associant à un idéal de* $U(K \otimes \mathfrak{g})$ *ou* $S(K \otimes \mathfrak{g})$ *son image réciproque dans* $U(\mathfrak{g})$ *ou* $S(\mathfrak{g})$.

(iv) *Lorsque* x, y, z *sont des éléments de* $\mathfrak{g}$ *vérifiant les conditions de 0.4., on a le carré commutatif*

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Spec} U(\mathfrak{g})_z & \underset{\sim}{\xrightarrow{\beta(\mathfrak{g})}} & (\operatorname{Spec} S(\mathfrak{g}))_z{}^{\Gamma} \\ \wr\big\downarrow{\scriptstyle \psi(x, y, z)} & & \big\downarrow{\scriptstyle \eta(x, y, z)} \\ \operatorname{Spec} U(\mathfrak{g}'/ky)_z & \underset{\sim}{\xrightarrow{\beta(\mathfrak{g}'/ky)}} & (\operatorname{Spec} S(\mathfrak{g}'/ky))_z{}^{\Gamma} \end{array}$$

6. Remarques et Questions

6.1. La méthode que nous avons utilisée pour établir l'existence d'une bijection naturelle $\beta(\mathfrak{g}) : \operatorname{Spec} U(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Spec} S(\mathfrak{g})^{\Gamma}$ a l'inconvénient de ne pas tenir compte de la relation d'inclusion entre idéaux. Ainsi, nous n'avons pas réussi à prouver que $\beta(\mathfrak{g})$ conserve l'inclusion, bien que cela soit vrai sur tous les exemples que nous avons étudiés. Voici, sans démonstration, quelques remarques à ce propos :

Appelongs *régulier* tout idéal premier $\mathfrak{r}$ du centre $Z(\mathfrak{g})$ de $U(\mathfrak{g})$ tel que l'algèbre localisée $Z(\mathfrak{g})_{\mathfrak{r}} \otimes_{Z(\mathfrak{g})} U(\mathfrak{g}) \simeq U(\mathfrak{g})_{\mathfrak{r}}$ soit isomorphe à une algèbre $A_n(Z(\mathfrak{g})_{\mathfrak{r}}) \simeq Z(\mathfrak{g})_{\mathfrak{r}} \otimes_k A_n(k)$. Lorsque cela a lieu, il y a un élément $f \notin \mathfrak{r}$ de $Z(\mathfrak{g})$ telle que $U(\mathfrak{g})_f = \{u/f^n, u \in U(\mathfrak{g}), n \geqslant 0\}$ soit déjà isomorphe à $A_n(Z(\mathfrak{g})_f)$. Les idéaux réguliers forment donc un ouvert $0(\mathfrak{g})$ de Spec $Z(\mathfrak{g})$, *l'ouvert régulier*; cet ouvert n'est pas vide, puisque (0) est régulier d'après le section 2.

Pour tout idéal régulier $\mathfrak{r}$ de $Z(\mathfrak{g})$, il y a un idéal premier I et un seul de $U(\mathfrak{g})$ tel que $\mathfrak{r} = I \cap Z(\mathfrak{g})$. Nous dirons aussi qu'un tel I est *régulier*. Pour un tel I, $k(I)$ coïncide avec le corps des fractions de $Z(\mathfrak{g})/\mathfrak{r}$; de plus, l'égalité $U(\mathfrak{g})_{\mathfrak{r}} \simeq Z(\mathfrak{g})_{\mathfrak{r}} \otimes A_n$ montre que I a même poids que (0) (confer section 4.1.), donc que ce poids est constant sur l'ouvert régulier. Est-ce que l'égalité "poids (I) = poids (0)" caractérise les idéaux premiers réguliers de $U(\mathfrak{g})$?

Soient I et I' deux idéaux premiers de $U(\mathfrak{g})$, $\mathfrak{r}$ et $\mathfrak{r}'$ leurs intersections avec $Z(\mathfrak{g})$. Si I est régulier, l'inclusion $I \supset I'$ équivaut à $\mathfrak{r} \supset \mathfrak{r}'$: car $\mathfrak{r} \supset \mathfrak{r}'$ entraîne $\mathfrak{r}_{\mathfrak{r}} \supset \mathfrak{r}_{\mathfrak{r}}'$, donc $\mathfrak{r}_{\mathfrak{r}} \otimes A_n \supset \mathfrak{r}_{\mathfrak{r}}' \otimes A_n$ et ces idéaux correspondent respectivement à $I_{\mathfrak{r}}$ et $I_{\mathfrak{r}}'$ sous l'isomorphisme $Z(\mathfrak{g})_{\mathfrak{r}} \otimes A_n \xrightarrow{\sim} U(\mathfrak{g})_{\mathfrak{r}}$.

6.2. Identifions $Z(\mathfrak{g})$ à l'anneau $S(\mathfrak{g})^{\Gamma}$ des invariants de $S(\mathfrak{g})$ au moyen de l'isomorphisme canonique [6]. On déduit facilement de [5], section 7 que, si $\beta(\mathfrak{g})$: Spec $U(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\sim}$ (Spec $S(\mathfrak{g}))^{\Gamma}$ applique I sur J, alors $I \cap Z(\mathfrak{g}) = J \cap Z(\mathfrak{g})$.

Est-ce que le morphisme de schémas Spec $S(\mathfrak{g}) \to$ Spec $Z(\mathfrak{g})$, induit par l'inclusion de $Z(\mathfrak{g})$ dans $S(\mathfrak{g})$, permet d'identifier l'ouvert régulier $0(\mathfrak{g})$ de 6.1. au schéma-quotient d'un ouvert saturé de Spec $S(\mathfrak{g})$ par Γ?

6.3. Est-ce que les isomorphismes $k(I) \xrightarrow{\sim} k'(\beta(\mathfrak{g})\, I)$ de 5.3. appliquent $Z(I)$ sur $(S(\mathfrak{g})/\beta(\mathfrak{g})\, I)^{\Gamma}$? C'est vrai lorsque $I = 0$ d'après [5].

6.4. Les traces $\mathfrak{r}$ et $\mathfrak{r}'$ de deux idéaux premiers I et I' de $U(\mathfrak{g})$ sur $Z(\mathfrak{g})$ peuvent être comparables, sans que I et I' le soient : soit par exemple $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie qui a pour base x, y, z, u, v, les seuls crochets non nuls étant $[x, y] = u$ et $[y, z] = v$. Alors $Z(\mathfrak{g}) = k[u, v, uz + vx]$ et les idéaux réguliers sont ceux qui ne contiennent pas à la fois u et v. Si I est engendré par u et v, I' par v et z, alors I' est régulier, I ne l'est pas et $I \cap Z(\mathfrak{g}) \supsetneq I' \cap Z(\mathfrak{g})$.

6.5. On peut décrire simplement les idéaux premiers de $U(\mathfrak{g})$, lorsque $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie $\mathfrak{Sl}(2, \mathbf{C})$ (non nilpotente!); voici le résultat : prenons pour base de $\mathfrak{g}$ les matrices

$$W = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad Y = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Posons $Z = X + iY$, $\bar{Z} = X - iY$ et $Q = W^2 + W + \bar{Z}Z$. Alors Q est l'élément de Casimir et engendre le centre de $U(\mathfrak{g})$. Les idéaux premiers I de $U(\mathfrak{g})$ sont classés comme suit :

(a) Si $I \cap k[Q] = 0$, I est nul;

(b) Si $I \cap k[Q]$ est l'idéal engendré par $Q - q$, deux cas sont possibles :

(b_1) ou bien I est l'idéal de $U(\mathfrak{g})$ qui est engendré par $Q - q$;

(b_2) ou bien I est l'annulateur d'une représentation simple de dimension finie de $\mathfrak{g}$; on sait que ce dernier cas se présente lorsque $q = u^2 + u$, $u \geqslant 0$, $2u \in \mathbf{Z}$; dans ce cas, l'idéal premier $U(\mathfrak{g})(Q - q)$ est contenu dans un idéal maximal de codimension finie.

On tire facilement de là que la dimension de Krull $K\dim U(\mathfrak{g})$ est égale à 2.

6.6. Rappelons que, si A est un anneau noethérien à droite et $I_0 \supsetneq I_1 \supsetneq \cdots \supsetneq I_n$ une chaîne d'idéaux premiers de A, alors $n \leqslant K\dim A$. Voici une démonstration plus élémentaire que celle donnée en [7], p. 425 : il suffit de prouver que si $I \supsetneq J$ sont des idéaux premiers, alors $K\dim(A/I) < K\dim(A/J)$. Quitte à remplacer A par A/J, on peut supposer qu'on a $J = 0$. Pour tout idéal à droite $\mathfrak{d}$, on a alors $0 \neq \mathfrak{d} \cdot I \subset \mathfrak{d} \cap I$, ce qui montre que A est extension essentielle de I, donc que I contient un élément s qui ne divise pas 0 (Goldie). On a donc une suite infinie décroissante

$$A \supset sA \supset s^2A \supset s^3A \supset \cdots$$

et $K\dim(s^iA/s^{i+1}A) \geqslant K\dim(S^iA/s^iI) = K\dim(A/I)$, ce qui prouve le résultat.

Lorsque $A = U(\mathfrak{g})$, $\mathfrak{g}$ étant une algèbre de Lie résoluble, ou bien lorsque $\mathfrak{g} = \mathfrak{Sl}(2, \mathbf{C})$, $K\dim A$ est la borne supérieure des longueurs des chaînes d'idéaux premiers.

Bibliographie

1. Bourbaki, N. "Groupes et Algèbres de Lie," chap. I.
2. Bourbaki, N. "Algèbre Commutative," chap. 3.
3. Bourbaki, N. "Algèbre : Modules et Anneaux Semi-Simples," chap. 8.
4. Dixmier, J. Sur les représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents. *Can. J. Math.* 10 (1958),
5. Dixmier, J. Représentations irréductibles des algèbres de Lie nilpotentes. *Ann. Acad. Brasil. Cienc.* (1963).*

* M. Dixmier nous prie de signaler une erreur, qui s'est glissée dans le théorème 4, page 503. Le lemme 19 est mal utilisé dans la démonstration de l'implication (ii) $\Rightarrow$ (iv). En réalité, on a (i) $\Leftrightarrow$ (iii) $\Leftrightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (ii). Par contre $\rho(U)$ peut avoir k pour centre, sans que $\mathfrak{h}$ soit de dimension maximum : prendre pour $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de dimension 3 (p. 513 de [5]), pour f une forme linéaire telle que $f(z) = 1$, pour $\mathfrak{h}$ le centre $\mathfrak{z}$ de $\mathfrak{g}$.

6. DIXMIER, J. Sur l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie nilpotente. *Arch. Math.* **109** (1959).
7. GABRIEL, P. Des catégories abéliennes. *Bul. Soc. Math. Franç.* (1962).
8. MCCONNELL. The intersection theorem in a class of non-commutative rings. *Proc. London Math. Soc.*, à paraître.
9. MCCONNELL. A characterisation of rings with a height function. *J. London Math. Soc.*, à paraître.
11. RINEHART, G. S. Note on the global dimension of a certain ring. *Proc. Am. Math. Soc.* **13** (1962), 341.